COLÉGIO

SERVIAM

SOLEDADE

DESDE 1739

Aula 02
Análise Combinatória
Samuel Oliveira

ANÁLISE COMBINATÓRIA

DEFINIÇÃO

Parte da Matemática que investiga o número de disposições possíveis dos membros de um conjunto nos seus <u>subconjuntos</u>.

Os métodos de contagem foram iniciados no século XVI pelo matemático italiano **Niccolo Fontana**, conhecido como ***Tartaglia***.

O princípio multiplicativo é o alicerce para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (P.F.C.)

Se um acontecimento ocorre em duas etapas sucessivas e independentes, sendo que a 1ª situação ocorre de ***a*** maneiras e a 2ª situação ocorre de ***b*** maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto ***a.b***

Exemplos:

1)Num banco de automóvel, o assento pode ocupar seis posições diferentes, enquanto o encosto pode ser colocado em quatro posições. Combinando assento e encosto, quantas posições diferentes esse banco pode ter?

a) 6
b) 24
c) 30
d) 10
e) 720

2) Quantos anagramas tem a palavra CINEMA?

3) Temos disponíveis apenas os algarismos 1, 2, 3, 7, 8 e 9.

a) Quantos numerais de três dígitos podemos formar?

b) E se não pudermos repetir algarismos?

c) E se tivéssemos pelo menos dois algarismos repetidos?

4) Num estádio, há 10 portas. Quantas possibilidades existem de uma pessoa entrar por uma porta e sair por outra?

PRINCÍPIO DA PREFERÊNCIA

Se uma situação de contagem traz alguma restrição (uma condição especial), a primeira etapa deve sempre procurar satisfazer tal restrição.

Exemplos:

01) Com relação aos anagramas da palavra MARLI, responda:

a) Quantos podemos formar?

b) Quantos terminam por vogal?

c) Quantos começam por consoante e terminam por vogal?

02) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem, obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 20

FATORIAL

Sendo ***n*** um número inteiro maior que 1, define-se ***fatorial de n*** como o produto dos ***n*** números naturais consecutivos de n a 1.

Indicação: n! (n fatorial)

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3). \ldots .\ 3\ .\ 2\ .\ 1$$

Observação:

Podemos escrever para qualquer n ($n \in \mathbb{N}$) e $n > 0$:

$$n! = n.(n-1)!$$

Assim:

8! = 8.7.6.5.4.3.2.1

8! = 8.7!

8! = 8.7.6!

Casos Especiais:

$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Demonstração:

Se $n = 2$:

$n! = n(n - 1)! \Rightarrow 2! = 2.(2 - 1)!$

$$2! = 2.1!$$

$$2.1 = 2.1! \quad (\div 2 \text{ ambos os membros})$$

$$1 = 1!$$

Se $n = 1$:

$n! = n(n - 1)! \Rightarrow 1! = 1.(1 - 1)!$

$$1! = 1.0!$$

$$1 = 1.0!$$

$$1 = 0!$$

Exemplos:

1) Calcule o valor de $\dfrac{5!}{3!+2!}$.

2) Resolver as seguintes equações n $\in$ R:

a) $(2n+3)! = 1$

b) $(3n-3)! = 24$

c) $(4n+2)! = 150$

d) $\dfrac{(n+2)! \cdot (n-2)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!} = 2$

PERMUTAÇÃO

Permutar ***n*** elementos significa obter todas as sequências formadas pelos elementos iniciais.

O número de permutações dos ***n*** elementos é igual a n!.

Notação: $P_n = n!$

Exemplos:

1) Seis pessoas entram em um banco. Em quantas sequências diferentes elas podem formar uma fila no caixa?

2) Considere a palavra ***COMBATE***.

a) Quantos anagramas dela podemos formar?

b) Em quantos anagramas as letras C, O e M estão juntas e nessa ordem?

c) Em quantos anagramas as letras C, O e M aparecem juntas?

d) Em quantos anagramas as vogais aparecem juntas a as consoantes também?

e) Em quantos anagramas as vogais e as consoantes estão alternadas?

Permutação com elementos repetidos

Quantos são os anagramas da palavra **GATO**?

4 . 3 . 2 . 1 = 24

GATO,	TAGO,	AOTG,	OAGT,
GAOT,	TAOG,	AOGT,	OATG,
GOAT,	TOAG,	ATOG,	OGTA,
GOTA,	TOGA,	ATGO,	OGAT,
GTOA,	TGOA,	AGOT,	OTAG,
GTAO,	TGAO,	AGTO,	OTGA.

Quantos são os anagramas da palavra **GATA**?

GATA, GAAT, GAAT, GATA, GTAA, GTAA, ...

Para a palavra **GATA**, o número de anagramas é calculado da seguinte forma:

Para o total de letras: 4!
Para a letra repetida: 2!

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12\,\text{anagramas}$$

A palavra **BANANA** tem: $\frac{6!}{2!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 60\,\text{anagramas}$

As palavras **CARRO** e **ABACATE** tem, respectivamente:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 60\,\text{anagramas} \qquad \frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 840\,\text{anagramas}$$

Exemplos:

01) Determine o número de anagramas formados com a palavra MISSISSIPI.

02) Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam pela letra C?

03) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. Quantos são os modos possíveis de colocar 2 caras e 4 coroas voltadas para cima?

Fórmulas de Contagem

Muitas situações que envolvem contagem têm uma estrutura semelhante, um modelo que pode ser repetido. Nesses casos, podemos usar as chamadas ***Fórmulas de Contagem***.

As fórmulas mais importantes e comuns são aquelas relacionadas aos <u>agrupamentos</u> que podemos fazer usando <u>elementos de um conjunto</u>.

Exemplo:

Com os algarismos 4, 6, 8 e 9 formar:

I - Todos os números com 4 algarismos distintos.

4 . 3 . 2 . 1 =24 números

II - Todos os números distintos de 2 algarismos.

$$\begin{cases} 4 \text{ e } 6: 46 \text{ e } 64 \\ 4 \text{ e } 8: 48 \text{ e } 84 \\ 4 \text{ e } 9: 49 \text{ e } 94 \\ 6 \text{ e } 8: 68 \text{ e } 86 \\ 6 \text{ e } 9: 69 \text{ e } 96 \\ 8 \text{ e } 9: 89 \text{ e } 98 \end{cases}$$

Observe que a ***troca de posição dos algarismos*** em cada grupo de 2 implica o aparecimento de números diferentes, ou seja, ***a ordem dos elementos influi na formação dos números***.

Logo:

$$S = \{46, 48, 49, \ldots, 98\}$$

III - Todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto {4, 6, 8, 9}.

Temos:
{4, 6}, {4, 8}, {4, 9}, {6, 8}, {6, 9}, {8, 9}

Observe que a ***troca de posição dos elementos*** ***não é significativa***, ***a ordem dos números não influi na formação dos subconjuntos***.

no exemplo I: temos uma permutação simples.

no exemplo II: temos um arranjo simples.

no exemplo III: temos uma combinação simples.

ARRANJO SIMPLES

São agrupamentos que diferem uns dos outros pela ***ordem*** ou pela ***natureza*** dos elementos.

Fórmula: $$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (0 \leq p \leq n) \quad n, p \in N$$

Exemplo: Numa classe há 40 alunos e desejamos formar comissões de 3 alunos. De quantas formas distintas podemos eleger uma comissão sendo que ela deve ter 3 cargos diferenciados: um presidente, um secretário e um tesoureiro?

Havendo cargos diferenciados na comissão, a ordem da eleição de seus membros tem importância: a comissão (A presidente, B secretário e C tesoureiro) é diferente, por exemplo, da comissão (A presidente, C secretário e B tesoureiro). Neste caso, trata-se de um *arranjo simples*.

$$A_{40,\,3} = 40 \,.\, 39 \,.\, 38 = 59\,280 \text{ comissões}$$

COMBINAÇÃO SIMPLES

São agrupamentos que diferem uns dos outros apenas pela ***natureza*** dos elementos.

Fórmula: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \quad (0 \leq p \leq n) \quad n, p \in N$

Exemplo: Numa classe há 40 alunos e desejamos formar comissões de 3 alunos. De quantas formas distintas podemos eleger uma comissão?

Não havendo cargos diferenciados na comissão, a ordem da eleição de seus membros não tem importância. Trata-se, portanto, de uma combinação simples.

$$C_{40,3} = \frac{40!}{3! \cdot (40-3)!} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40.39.38.37!}{3.2.1.37!} = 9880 \text{ comissões}$$

Aplicação:

1) Considere uma circunferência onde são marcados 5 pontos distintos.

a) Quantos triângulos podem ser determinados com vértices em três desses pontos?

b) Quantos polígonos podem ser formados com vértices usando esses pontos?

2) Uma salada de frutas deve conter quantidades iguais de quatro tipos de frutas escolhidas entre uva, maçã, laranja, mamão, morango, abacaxi, jambo e melão. Quantas saladas diferentes podem ser preparadas com essas quatro frutas?

PERMUTAÇÃO SIMPLES

São agrupamentos que diferem uns dos outros apenas pela ***ordem*** dos elementos.

Fórmula:

$$P_n = n!$$

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com a palavra UNICAMP.

$P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5\ 040$ permutações

Obs.:

Podemos considerar uma *Permutação Simples* com sendo um caso particular de *Arranjo Simples* onde, ***n = p***.

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = A_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Exercícios Gerais:

01) Dez atletas participam de uma corrida de atletismo. Serão premiados apenas os três primeiros colocados, não podendo haver empate. Determine o número de maneiras de serem distribuídos os prêmios.

02)(UNEB) Um empresário, visando proteger o sistema de segurança de sua firma, deseja criar senhas constituídas de seqüências de quatro dígitos distintos, sendo os dois primeiros vogais e os dois últimos algarismos. O número de senhas distintas, do tipo descrito, que podem ser formadas é igual a:

a) 180 b) 200 c) 800 d) 1 600 e) 1 800

03)(UFBA) Uma pessoa possui 10 CDs de música clássica e quer escolher quatro deles para levar numa viagem. Sendo **n** o número de maneiras distintas em que a escolha pode ser feita, calcule n/3.